SMIA Semestre 3

A. ALAMI-Idrissi et E. Zerouali

6 avril 2010

Table des matières

Chapitre 1

SÉRIES NUMÉRIQUES

Dans tout le polycopié, l'ensemble $\mathbb{K}$ désignera soit le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, soit le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1.1 GÉNÉRALITÉS

Définition 1 *Etant donnée une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, on appelle série numérique de terme général u_n le couple formé de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$; S_n est appelée la somme partielle d'indice n de la série de terme général u_n .*

- *On dit que la série de terme général converge vers S ou que S est la somme de la série si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers S. Dans ce cas, on écrit $S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.*
- *Si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas convergente, la série $\sum u_n$ est dite divergente.*

Remarque.

1. L'étude de la série de terme général u_n (en abrégé on écrit $\sum u_n$), se ramène à celle la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Dans le cas où la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est définie qu'à partir d'un certain rang n_0 , nous étudierons les sommes partielles suivantes : $S_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k$ pour $n \geq n_0$.

Exemples.

1. Séries géométriques : Soit $k \in \mathbb{K}$,considérons la série de terme général $u_n = k^n$.Le calcul de la somme partielle d'indice n donne :

$S_n = \sum_{k=0}^{n} k^n = \frac{1-k^{n+1}}{1-k}$

La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si $|k| < 1$.Dans ce cas , nous avons :

$\sum_{n=0}^{+\infty} k^n = \frac{1}{1-k}$

2. Soit $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$. Nous avons

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Par conséquent , la série est convergente et l'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

L'exemple précédent s'étend de la façon suivante :

Proposition 1 *Soit la série* $\sum u_n$ *avec* $u_n = a_n - a_{n+1}$. *Alors la série* $\sum u_n$ *est convergente si et seulement si la suite* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est convergente et on a :*

$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = a_0 - a$, *avec* $a = \lim_{n \to +\infty} a_n$

1.1.1 Séries convergentes.

Propriété de stabilité.

Proposition 2 *L'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$. *D'autre part la nature d'une série est inchangée par la modification d'un nombre fini de termes.*

Preuve : La première assertion découle du fait que l'ensemble des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ convergentes est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. De plus si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries convergentes et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors nous avons,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Soit $\sum u_n$ une série d'éléments de $\mathbb{K}$, et une série $\sum v_n$ qui ne différe de la première série qu'en un nombre fini de termes. Soit n_0 assez grand tel que $u_n = v_n$ pour $n \geq n_0$. Notons S_n et T_n les sommes partielles respectives des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$. Pour tout $n \geq n_0$, nous avons $S_n - T_n = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k - v_k$. Par conséquent, les suites $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont de même nature.

Une condition nécéssaire pour qu'une série soit convergente.

Proposition 3 *Le terme général d'une série convergente est une suite convergente vers* 0.

Remarque. La proposition 3 est utilisée le plus souvent dans le sens contraire. On montre que le terme général ne tend pas vers zéro pour dire que la séie est divergente. En outre la condition ci-dessus n'est pas suffisante comme le montre l'exemple suivant :

Exemple : Soit la série de terme général $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. La somme partielle d'indice n est donnée par : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$. Par suite , nous avons :

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{n}{\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{n}{2}}$$

Ainsi la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas de Cauchy et donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente, bien que le terme général tende vers 0.

Exercice Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ est divergente.

Définition 2 *Restes de Cauchy*

Soit $\sum u_n$ *une série convergente, on appelle reste de Cauchy d'ordre* n *de la série, la suite définie par :* $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Il est clair que

Proposition 4 $\sum u_n$ *une série convergente si et seulemnt si le reste de Cauchy* $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge vers* 0.

Relation entre séries complexes et séries réelles.

Proposition 5 *La série à termes complexes* $\sum u_n + iv_n$ *converge si et seulement si les séries réelles* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *convergent.*

Application Calculer $S_N = \sum_{0}^{N} \frac{cosnx}{r^n}$ puis déduire que cette série est convergente.

1.2 SÉRIES RÉELLES A TERMES POSITIFS

1.2.1 Résultat fondamental

On dit qu'une série réelle $\sum u_n$ est à termes positifs s'il existe n_0 tel que $u_n \geq 0$ pour tout entier $n \geq n_0$. Le résultat suivant donne une condition et nécéssaire pour qu'une telle série converge.

Theorème 1 *Pour qu'une série à termes positifs soit convergente, il faut et il suffit que la suite des sommes partielles soit majorée, c'est à dire qu'il existe une constante $M > 0$ tel que :* $\sum_{k=0}^{n} u_k \leq M$, *pour tout entier n.*

Remarque. Si une série à termes positifs est divergente, alors la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$.

Theorème 2 *(Théorèmes de comparaison)*
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries à termes positifs telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang. Alors

- *Si $\sum v_n$ est convergente , la série $\sum u_n$ est convergente.*
- *Si $\sum u_n$ est divergente, la série $\sum v_n$ est divergente.*

Theorème 3 *Soit $\sum u_n$ une série à termes dans $\mathbb{R}+$, et soit $\sum v_n$ une série à termes positifs telle que $u_n = O(v_n)$ en $+\infty$. Alors si la série $\sum v_n$ est convergente, la série $\sum |u_n|$ est convergente. En particulier, deux séries à termes positifs équivalentes à l'infini sont de même nature.*

Cas particulier :
Si l'on a $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = l \in R^*$, le théorème s'applique.

1.2.2 Régles de convergence.

Régle de d'Alembert.

Theorème 4 *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs telle que* $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$. *Alors :*

i Si $l < 1$, la série $\sum u_n$ converge.

ii Si $l > 1$, la série $\sum u_n$ diverge.

iii Si $l = 1$, on ne peut pas conclure directement (il faut chercher un autre moyen).

Régle de Cauchy.

Theorème 5 *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs telle que* $\lim_{n \to +\infty} (u_n)^{1/n} = l$. *Alors :*

i Si $l < 1$, la série $\sum u_n$ converge.

ii Si $l > 1$, la série $\sum u_n$ diverge.

iii Si $l = 1$, on ne peut pas conclure directement (il faut chercher un autre moyen).

Régle de Riemann.

Theorème 6 *(Série de Riemann)*

Soit α *un nombre réel. La série* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, *appelée série de Riemann, est convergente si et seulement si* $\alpha > 1$.

Application : Séries de Bertrand. Soient α, β deux nombres réels, on se propose d'appliquer la régle de Riemann à la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^{\alpha} \ln^{\beta} n}$.

Discussion :

<u>Premier cas :</u> $\alpha < 1$

Soit $\gamma \in]\alpha, 1[$, alors $\lim_{n\to+\infty} n^{\gamma} u_n = \lim_{n\to+\infty} n^{\gamma-\alpha} / \ln^{\beta} n = +\infty$

donc la série $\sum u_n$ diverge.

<u>Deuxième cas :</u> $\alpha > 1$

Soit $\gamma \in]1, \alpha[$, alors $\lim_{n\to+\infty} n^{\gamma} u_n = \lim_{n\to+\infty} n^{\gamma-\alpha} / \ln^{\beta} n = 0$. Donc la série $\sum u_n$ converge.

<u>Troisième cas :</u> $\alpha = 1$

Si $\beta < 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} n u_n = \lim_{n\to+\infty} 1/\ln^{\beta} n = +\infty$

donc la série $\sum u_n$ diverge.

Les cas restants de cette discussion seront étudiés au prochain paragraphe.

1.2.3 Comparaison séries et intégrales :

Theorème 7 *Soit* f *une fonction continue par morceaux, décroissante et positive sur* $]0, +\infty[$. *Alors :*

(i) La série $\sum\limits_{n \geq 1} f(n)$ *converge si et seulement si l'intégrale* $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)\, dx$ *est convergente.Dans ce cas , nous avons la relation :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) - f(1) \leq \int_{1}^{+\infty} f(x)\, dx \leq \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$$

(ii) La série de terme général $w_n = \int\limits_{n-1}^{n} f(t)\, dt - f(n)$ $(n \geq 2)$ *converge.*

Exemples d'application

.

Exemple 1. Constante d'Euler.

Considérons la fonction $f : x \to 1/x$. Elle est continue, décroissante et positive sur $]0, +\infty[$. L'intégrale $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ est divergente, donc la série $\sum\limits_{n \geq 2} 1/n$ diverge aussi. Néanmoins, grâce au (ii) du théorème précédent la série de terme

général $w_n = \int\limits_{n-1}^{n} \frac{1}{t}dt \ -1/n = \ln n - \ln(n-1) - 1/n$ converge. La somme partielle d'indice n associée est donnée par :

$$\sum_{k\ =\ 2}^{n} w_k = \ln n - \sum_{k\ =\ 2}^{n} 1/k$$

La relation (3) ci-dessus donne : $0 \leq \lim_{n \to +\infty} \left(\ln n - \sum\limits_{k\ =\ 2}^{n} 1/k \right) \leq 1.$

On pose $\gamma = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum\limits_{k\ =\ 1}^{n} 1/k - \ln n \right)$, appelée la constante d'Euler et vérifie : $0 \leq \gamma \leq 1$ (une valeur approchée de $\gamma = 0,57721$)

Exemple 2. Séries de Bertrand (suite).

Soit la série de terme général $u_n = \frac{1}{n\ \ln^{\beta} n}$. $\beta \geq 0$, la fonction associée $f : x \to \frac{1}{x\ \ln^{\beta} x}$ est continue, décroissante et positive sur $[2, +\infty[$. Discutons suivant les valeurs de β :

(i) Si $\beta > 1$, l'intégrale $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{1}{x\ \ln^{\beta} x} dx$ est convergente, donc la série $\sum\limits_{n\ \geq\ 2} \frac{1}{n\ \ln^{\beta} n}$ converge grâce au théorème de comparaison.

(ii) $\beta = 1$, la série $\sum\limits_{n\ \geq\ 2} \frac{1}{n\ \ln\ n}$ diverge car $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{1}{x\ \ln\ x} dx = [\ln(\ln x)]_2^{+\infty} = +\infty$

(iii) $0 < \beta < 1$, on montre que la série $\sum\limits_{n\ \geq\ 2} \frac{1}{n\ \ln^{\beta}\ n}$ est divergente (exercice).

1.3 SÉRIES A TERMES QUELCONQUES

Définition 3 *Convergence absolue et semi-convergence Une série* $\sum u_n$ *est dite absolument convergente si la série* $\sum |u_n|$ *est convergente.Elle est dite semi-convergente si elle converge sans être absolument convergente.*

Bien entendu, il est possible d'appliquer les régles de convergence des séries à termes positifs à la série $\sum |u_n|$.

1.3.1 Critères de convergence.

Critère de Cauchy.

Proposition 6 *Une série numérique* $\sum u_n$ *est convergente si seulement si elle vérifie la condition suivante dite critère de Cauchy,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : q > p \geq n_0 \Longrightarrow \left| \sum_{k\ =\ p+1}^{q} u_k \right| < \varepsilon$$

Le critère de Cauchy n'est pas toujours facile à appliquer, mais il permet de répondre à bon nombre de questions, et notamment la relation entre convergence et convergence absolue.

La proposition suivante est une application directe du critère de Cauchy,

Proposition 7 *Toute série absolument convergente est convergente.*

Etant donnée deux séries $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Le Produit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ces deux séries est défini par $w_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$. On a

Proposition 8 *Le produit de deux séries absolument convergentes est absolument convergente et sa somme est le produit des sommes des deux séries.*

Critère d'Abel.

Proposition 9 *Soit* $\sum u_n$ *une série numérique telle que :*

α) $u_n = \varepsilon_n v_n$
β) Les sommes partielles de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées.
γ) La suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0.

Alors la série $\sum u_n$ est convergente.

Applications du critère d'Abel.

Séries alternées.

Une série numérique $\sum u_n$ est dite alternée si elle est de la forme $u_n = (-1)^n v_n$, avec $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante et tendant vers 0.

Theorème 8 *Toute série alternée $\sum u_n$ est convergente. De plus si l'on note $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$, $S = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$, les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et tendent vers S. De plus nous avons pour tout entier n :*

$S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$ et $|R_n| \leq |u_{n+1}|$ où $R_n = S - S_n$ est le reste de Cauchy.

Exemple. La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ est une série alternée, elle est semi -convergente.

Proposition 10 *La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n}$ est convergente si et seulement si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$.*

Preuve : La suite $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante tendant vers 0. Calculons les sommes partielles $\sum\limits_{k=1}^{n} e^{ik\theta}$ pour $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$:

$$\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta} = e^{i\theta}\left(\frac{1-e^{in\theta}}{1-e^{i\theta}}\right) \text{ d'où } \left|\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}\right| \leq \frac{2}{|1-e^{i\theta}|}$$

donc bornée.

Exercice : Étudier la nature des séries suivantes :

$\left(\tan \frac{2}{n} - \sin \frac{2}{n}\right)^{1/2} \quad (\ n \geq 2) \quad ; \arcsin\left(\frac{2n}{4n^2+1}\right)$; $\ln \frac{1}{\sqrt{n}} - \ln\left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$; $\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$; $(-1)^n \frac{\ln n}{n}$.

Chapitre 2

SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

Dans toute la suite $\mathbb{K}$ désigne le corps des nombres réels ou le corps des nombres complexes, E une partie de $\mathbb{K}$, et $\mathfrak{F}(E, \mathbb{K})$ représente l'espace des fonctions définies sur E et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

2.1 SUITES DE FONCTIONS

2.1.1 Convergence simple.

Définition 4 *Une suite de fonctions $f_n \in \mathfrak{F}(E, \mathbb{K})$ converge simplement sur $A \subset E$ vers une fonction $f \in \mathfrak{F}(E, \mathbb{K})$ si l'on a la propriété :*

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in A, \exists N(x) \in \mathbb{N} : n \geq N(x) \Longrightarrow |\, f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

f est appelée la limite simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur A. Une manière équivalente de voir la convergence simple dur A est de dire que $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$.

Exemples.

1. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans lui même,définies par :
   $f_n(x) = \frac{nx}{1+n|x|}$
   Alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f définie par :
   $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

2. Prenons $E = [-1, 2]$ et soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions de E dans $\mathbb{R}$,définies par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(\frac{1-n}{n}\right) x + 1 & \text{si} \quad x \in [-1, 0] \\ 1/2 \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) x + 1 & \text{si} \quad x \in]0, 2] \end{cases}$$

Alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si} \quad x \in [-1, 0] \\ (1/2)x + 1 & \text{si} \quad x \in [0, 2] \end{cases}$$

Exercice. Montrer que pour $\varepsilon > 0$ donné l'entier $N(x)$ dépend du point x selon qu'il appartient à $[-1, 0]$ où à $[0, 2]$.

L'exemple précedent montre que la limite simple d'une suite de fonctions continues n'est pas nécessairement continue. Nous allons introduire une notion de convergence qui permet de conserver la continuité.

Auparavant nous allons introduire la notion de norme sur un espace vectoriel :

2.1.2 Normes sur un espace vectoriel.

Définition 5 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, on appelle norme sur E toute application $x \to \|x\|$ de E dans $\mathbb{R}^+$ telle que :*

(i) $\|x\| = 0 \iff x = 0$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$

(iii) $\forall (x, y) \in E^2 \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Exemples. Sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ l'application $x \to |x|$ est une norme.

Sur $E = \mathbb{R}^n$ ou $E = \mathbb{C}^n$ les applications $x \to \sum_{k=1}^{n} |x_k|$, $x \to (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2)^{1/2}$ et $x \to \sup_{1 \leq k \leq n} |x_k|$ sont des normes (exercice).

2.1.3 Convergence uniforme.

Définition 6 *E étant une partie de $\mathbb{K}$, on dit qu'une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de E dans $\mathbb{K}$ converge uniformément sur E vers une fonction f de E dans $\mathbb{K}$ si l'on a :*

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in E : n \geq N(x) \Longrightarrow | f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

ou encore,

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Longrightarrow \sup_{x \in E} | f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

f est appelée la limite uniforme de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur E.

Theorème 9 *Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de E dans $\mathbb{K}$ qui converge uniformément sur E vers une fonction f. Alors f est continue sur E.*

Proposition 11 *(Double passage à la limite) Soit* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de fonctions continues de* E *dans* $\mathbb{K}$ *qui converge uniformément sur* E *vers une fonction* f*. Soit* a *un point adhérent à* E *tel que, pour tout entier* n*, la limite* $b_n = \lim_{x\to a} f_n(x)$ *existe. Alors la suite* (b_n) *a une limite* b *et* $f(x)$ *tend vers* b *lorsque* x *tend vers* a*, soit :*

$\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.

Remarque.

La convergence uniforme implique la convergence simple, mais la réciproque n'est pa vraie. La convergence de l'exemple 1) i) n'est pas uniforme car la fonction limite n'est pas continue en 0.

2.1.4 Théorèmes de passage à la limite.

Theorème 10 *(Intégration)*

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de fonctions réelles continues sur un intervalle* $[a, b]$ *uniformément convergente vers* f*, alors :*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$$

Theorème 11 *(Théorème (Dérivation) Soit* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de fonctions réelles de classe* C^1 *sur un intervalle* $[a, b]$ *telle que :*

(i) La suite $(f_n')_{n \in \mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* g*,*

(ii) Il existe $x_0 \in [a, b]$ *tel que la suite* $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ *converge.*

Alors la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge uniformément vers une fonction* f *de classe* C^1 *et telle que* $f' = g$*.*

2.2 SÉRIES DE FONCTIONS

Définition 7 *Soit une suite de fonctions* $f_n \in \mathfrak{F}(E, \mathbb{K})$*. On appelle série de fonctions de terme général* f_n*, notée* $\sum f_n(x)$ *le couple* (f_n, S_n)*, où* S_n *désigne la somme partielle* $S_n = \sum_{p=0}^{n} f_p$*.Si la suite de fonctions* (S_n) *est uniformément convergente sur* E*, la série* $\sum f_n$ *est dite uniformément convergente sur* E*.*

Exemple. On prend $E =]-1, 1[$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Considérons la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$. Le domaine de définition de cette série est bien l'intervalle $]-1, 1[$; montrons qu'elle est uniformément convergente sur tout intervalle fermé $[-r, r]$ avec $r \in]0, 1[$.Notons $S_n(x) = \sum_{p=0}^{n} x^p$ et $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$. Nous avons alors pour tout $x \in [-r, r]$:

$$| \, S(x) - \; S_n(x)| = \frac{x^{n+1}}{1-x} \leq \frac{r^{n+1}}{1-r}$$

Comme la suite $\left(\frac{r^{n+1}}{1-r}\right)$ converge vers 0, la suite (S_n) est uniformément convergente.

2.2.1 Continuité des séries.

Nous avons le résultat suivant pour les séries de fonctions continues :

Theorème 12 *Soit une suite de fonctions $f_n \in \mathfrak{F}(E, \mathbb{K})$. Si la série $\sum f_n$ est uniformément convergente sur E, et si chaque fonction f_n est continue au point a de E, alors la fonction somme $S : x \to \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est continue au point a.*

Un corollaire du résultat de la double limite est la proposition qui suit :

Proposition 12 *Soit $E \subset \mathbb{K}$ et (f_n) une suite uniformément convergente sur E ; et soit a un point adhérent à E tel que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la limite $u_n = \lim_{x \to a} f_n(x)$ existe . Alors la série numérique $\sum u_n$ est convergente et sa somme vérifie l'égalité :*

$$\lim_{x \to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

2.2.2 Dérivation terme à terme d'une série.

Proposition 13 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et (f_n) une suite de fonctions réelles dérivables sur I telle que la série $\sum f_n$ soit simplement convergente. Si la série de terme général f_n' est uniformément convergente sur I, alors la fonction somme $S : x \to \sum f_n(x)$ est dérivable sur I et l'on a la formule :*

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)$$

Exemple. Soit $I =]-1, 1[$. Considérons la suite de fonctions (f_n) définie sur I par $f_n : x \to (-1)^{n-1} x^n / n$. A l'aide du critère de d'Alembert, la série $\sum\limits_{n \geq 1} (-1)^{n-1} x^n / n$ est absolument convergente pour tout $x \in I$. La série dérivée $\sum\limits_{n \geq 1} (-1)^{n-1} x^{n-1}$ est uniformément convergente sur tout intervalle de la forme $[-r, r]$ avec $r \in]0, 1[$ (exemple II) b)). Par conséquent la fonction $x \to \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} x^n / n$ est dérivable sur $]-1, 1[$ (il s'agit de la fonction $x \to \ln(1 + x)$).

2.3 CRITÈRES DE CONVERGENCE UNIFORME

Pour la convergence simple des séries de fonctions, il est possible d'utiliser les critères et les régles des séries numériques. Quant à la convergence uniforme, nous disposons des critères suivants :

2.3.1 Critère de Cauchy uniforme.

Theorème 13 *Une série* $\sum f_n(x)$ *de fonctions sur ensemble* E *de* $\mathbb{K}$ *, à valeurs réelles ou complexes, converge uniformément si, et seulement si, pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe un entier* N *tel que :*

$$q \geq p \geq N \implies \left| \sum_{n=p}^{q} f_n(x) \right| < \varepsilon, \ \forall x \in E$$

Définition 8 ***Convergence normale.*** *On dit qu'une série de fonctions* $\sum f_n(x)$ *converge normalement sur* $E \subset \mathbb{K}$ *, s'il existe une série réelle à termes positifs* $\sum a_n$ *telle que* $|f_n(x)| \leq a_n$ *pour* $n \geq n_0$ *et pour tout* $x \in E$.

Theorème 14 *Pour une série de fonctions réelles ou complexes, la convergence normale implique la convergence absolue et la convergence uniforme.*

2.3.2 Critère d'Abel uniforme.

En reprenant la démonstration du critère d'Abel, nous obtenons le critère d'Abel uniforme pour les séries de fonctions :

Theorème 15 *Soit* $\sum \varepsilon_n(x) u_n(x)$ *une série de fonctions réelles sur un ensemble* E *telle que :*

1. *La suite de fonctions* (u_n) *est décroissante et tend simplement vers* 0.
2. *Il existe une constante* $C > 0$ *telle que, pour tout* $x \in E$ *et* $q \geq p$ *:* $\left| \sum_{n=p}^{q} \varepsilon_n(x) \right| < C$

Application : Soit (ε_n) une suite de nombres réels positifs , décroissante et tendant vers zéro ; alors quel que soit $\theta > 0$, la série $\sum \varepsilon_n e^{inx}$ est uniformément convergente sur l'intervalle $[\theta, 2\pi - \theta]$. *Preuve :* On a :
$\left| \sum_{k=0}^{n} e^{\mathbb{K}x} \right| = \left| \frac{e^{i(n+1)x}-1}{e^{ix}-1} \right| \leq \frac{2}{|e^{ix}-1|} = 1/\sin\left(\frac{x}{2}\right) \leq 1/\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ pour $x \in [\theta, 2\pi - \theta]$.

Exercice : Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n/n!$ définit une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, notée $x \to e^x$. Montrer la relation : $e^{x+y} = e^x.e^y$, pour tout couple de réels (x, y).

Chapitre 3

SÉRIES ENTIÈRES

3.1 GÉNÉRALITES

Définition 9 *Une série entière sur une partie A de $\mathbb{C}$ est une série de fonctions dont le terme général est donnée par $u_n(z) = a_n z^n$ où z est une variable complexe et (a_n) une suite de nombres complexes.*

Si la série est convergente sur A cela permet de définir une fonction sur A à valeurs dans $\mathbb{C}$ $z \to \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Si $\sum b_n z^n$ est une autre série entière convergente sur une partie B de $\mathbb{C}$, alors la somme des deux séries entières est une série entière définie sur l'intersection $A \cap B$ par :

$\sum (a_n + b_n) z^n = \sum a_n z^n + \sum b_n z^n$

Si les deux séries sont absolument convergentes sur leurs domaines respectifs , alors la série produit est absolument convergente sur $A \cap B$ et elle est donnée par :

$(\sum a_n z^n)(\sum b_n z^n) = \sum c_n z^n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

Exemples.

(i) On peut montrer grâce à la régle de d'Alembert que la série $\sum_{n \geq 1} z^n/n$ est absolument convergente sur le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$. En effet :

$\lim_{n\to+\infty} \frac{|z^{n+1}|}{n+1} \frac{n}{|z^n|} = |z|$

d'où la conclusion annoncée.

(ii) A l'aide de la même régle , on peut montrer que la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n/n!$ est absolument convergente sur $\mathbb{C}$.

3.2 DOMAINE DE CONVERGENCE

Nous allons montrer que le domaine de convergence d'une série entière est soit un disque ouvert centré à l'origine soit tout le plan complexe $\mathbb{C}$.

3.2.1 Existence du rayon de convergence.

Proposition 14 *Lemme d'Abel Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière et* z_0 *un point non nul de* $\mathbb{C}$ *tel que la série numérique* $\sum a_n z_0^n$ *soit convergente. Alors :*

(i) La série $\sum a_n z^n$ *converge absolument sur le disque* $D(0, |z_0|) = \{z \in \mathbb{C} \;/\; |z| < |z_0|\}$

(ii) Pour tout $r \in]0, |z_0|[$ *la série* $\sum a_n z^n$ *converge normalement sur le disque fermé* $\overline{D}(0, r)$

Theorème 16 *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière dans* $\mathbb{C}$*, alors il existe* $R \in [0, +\infty]$ *tel que la série converge absolument dans le disque ouvert* $D(0, R)$ *et diverge aux points* z *tels que* $|z| > R$*. Le nombre* R *est appelé le rayon de convergence de la série entière et dans le cas où* R *est fini le disque est appelée disque de convergence. En outre pour tout* $r < R$ *la série* $\sum a_n z^n$ *converge normalement sur le disque fermé* $|z| \leq r$*. On ne peut rien dire sur la convergence de la série aux points* z *tels que* $|z| = R$*.*

3.2.2 Calcul du rayon de convergence.

Le calcul explicite du rayon de convergence n'est pas toujours possible avec la formule ci-dessus. La proposition suivante permet la détermination pratique du rayon de convergence dans certains cas :

Proposition 15 *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière et* R *son rayon de convergence. Alors* R *est donné par :*

(i) $1/R = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to +\infty} |a_n|^{1/n}$

lorsque la première limite existe.

(ii) $1/R = \lim_{n \to +\infty} |a_n|^{1/n}$

si cette limite existe.

Avec la convention $R = 0$ *si la limite est infinie et* $R = +\infty$*, si la limite est nulle.*

Preuve :

Application directe des régles de convergence absolue de D'Alembert et de Cauchy.

Exemples.

i) Le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n \geq 1} z^n/n$ est $R = 1$, son domaine de convergence est le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$.

ii) La série $\sum\limits_{n\,=\,0}^{+\infty}\;(-1)^n\,z^{2n\,+1}/(2n\,+\,1)!$ admet $+\infty$ comme rayon de convergence et converge sur tout le plan complexe.

(iii) Considèrons la série $\sum a_n z^n$ avec $a_{2p} = (2/3)^p$ et $a_{2p+1} = 2\,(2/3)^p$ .La suite (a_{n+1}/a_n) n'a pas de limite à l'infini tandis que l'on a :

$\lim_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} = \sqrt{2/3}$. Par conséquent le rayon de convergence de cette série entière est $\sqrt{3/2}$.

Exercice. Déterminer le rayon de convergence des séries $\sum\limits_{n\,\geq\,1} n!z^n$ et $\sum\limits_{n\,=\,0}^{+\infty}$ z^{2n}.

Remarque : Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence R_1 et R_2 respectivement. Alors les séries somme et produit de ces deux séries ont chacune un rayon de convergence supérieur ou égal à $\inf\left(R_1, R_2\right)$.

3.3 PROPRIÉTES DES SÉRIES ENTIÈRES

3.3.1 Continuité.

Theorème 17 *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors l'application $z \to \sum\limits_{n\,=\,0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur le disque de convergence $D\,(0, R)$.*

Preuve : Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que $|z_0| < R$. D'aprés le théorème précédent, la série $\sum a_n z^n$ est normalement convergente (et donc uniformément convergente) sur le disque fermé $|z| \leq |z_0|$. Comme le terme général ($z \to a_n z^n$)est une fonction continue, alors on déduit la continuité de la série entière sur le disque $\overline{D}\,(0, |z_0|)$ et en particulier au point z_0.

3.3.2 Dérivation.

Définition 10 *On appelle série dérivée d'une série entière réelle $\sum a_n x^n$ la série entière $\sum_{n\,\geq\,1} na_n\;x^{n\,-\,1}$.*

Theorème 18 *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière réelle de rayon de convergence R non nul. Alors sa série dérivée posséde le même rayon de convergence et la fonction $f:\; x \to \sum\limits_{n\,=\,0}^{+\infty} a_n x^n$ est dérivable sur l'intervalle de convergence $]-R, R\,[$ et l'on a :*

$$f\,'\,(x) = \sum_{n\,=\,1}^{+\infty} na_n\;x^{n\,-\,1}$$

Remarques.

(i) En itérant le résultat ci-dessus aux dérivées successives de la fonction f , nous obtenons que la somme de toute série entière est indéfiniment dérivable sur son intervalle de convergence.

(ii) Une série entière de rayon non nul peut-être intégrée terme à terme. Ainsi,nous avons pour tout intervalle $[0, x] \subset]-R, R[$:

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

3.4 APPLICATIONS

3.4.1 Développement en série entière des fonctions usuelles.

Définition 11 *Une fonction réelle f définie sur un intervalle $]-a, a[$, est dite développable en série entière s'il existe $R \geq a$ et une série entière $\sum a_n x^n$ telle que :*

$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *pour tout* $x \in]-a, a[$.

Dans ce cas, la série entière est unique et l'on a pour tout entier n : $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

Exemple : Sur l'intervalle $]-1, 1[$, la fonction $x \to 1/(1+x)$ s'écrit comme la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$. Nous en déduisons le développement du logarithme sur le même intervalle :

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} x^n/n \quad \text{et} \quad \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} x^n/n$$

et de la fonction arctangente (dont la dérivée est la fonction $x \to 1/\left(1+x^2\right)$) :

$$\arctan x = \sum_{n=n}^{+\infty} (-1)^n \; x^{2n+1}/(2n+1)$$

Condition nécéssaire et suffisante pour développer une fonction réelle en série entière :

Theorème 19 *Une fonction f définie sur un intervalle $]-a, a[$ admet un développement en série entière si et seulement si :*

i) f est indéfiniment dérivable sur $]-a, a[$.

ii) Pour tout $x \in]-a, a[$, nous avons : $\lim_{n \to +\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt = 0.$

En particulier, la condition ii) est réalisée si la suite des dérivées $\left(f^{(n)}\right)$ est uniformément bornée sur $]-a, a[$, c'est à dire qu'il existe $M > 0$ tel que :

$\left| f^{(n)}(t) \right| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in]-a, a[$.

Exemples.

i) Les fonctions circulaires $x \to \cos x$ et $x \to \sin x$ sont de classe C^{∞} et admettent des dérivées bornées par 1. Elles sont associées à des séries entières de rayon infini,

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} /(2n)!$$
$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)!$$

ii) Les fonctions hyperboliques $x \to \cosh x$ et $x \to \sin hx$ possédent les développements suivants sur $\mathbb{R}$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} /(2n)!$$
$$\sinh x = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n+1}/(2n+1)!$$

iii) Pour α réel la fonction puissance $x \to (1+x)^{\alpha}$ peut-être développée en série entière sur l'intervalle $]-1,+1[$:

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+2)}{n!} x^n$$

3.4.2 Introduction de nouvelles fonctions.

Cette section est consacrée aux fonctions introduite grace au séries entières.

La fonction exponentielle complexe.

La série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n/n!$ admet un rayon de convergence infini, elle coincide avec la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, elle est appelée la fonction exponentielle complexe . Elle vérifie la relation : $e^{z+z'} = e^z.e^{z'}$

les fonctions circulaires et hyperboliques complexes.

Elles sont définies sur $\mathbb{C}$ par :

$$\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{2n} /(2n)! \qquad \sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{2n+1}/(2n+1)!$$
$$\cosh z = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{2n} /(2n)! \qquad sinhz = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{2n+1}/(2n+1)!$$

3.4.3 Résolution de certaines équations différentielles.

Les série entières peuvent etre utilisée pour résoudre des équation différentièlles comme le montre l'exemple suivant :

Soit à résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} 4xy'' + 2y' + y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Cherchons la solution sous la forme d'une série entière $y = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Le calcul des dérivées donne :

$y' = a_1 + 2a_2 x + ... + na_n x^{n-1} + ...$

$y'' = 2a_2 + 6a_3 x + ... + n(n-1) a_n x^{n-2} + ...$

Remplaçons ces formules dans l'équation différentielle

$4xy'' + 2y' + y = (a_0 + 2a_1) + (a_1 + 12a_2) x + ... + (a_{n-1} + 2na_n + 4n(n-1) a_n) x^{n-1} + ... = 0$

D'après l'unicité du développement en série entière, nous en déduisons que tous les coefficients sont nuls :

$a_0 + 2a_1 = a_1 + 12a_2 = a_{n-1} + 2n(2n-1) a_n = ... = 0$

Comme $y(0) = a_0 = 1$, nous obtenons : $a_n = (-1)^n / (2n)!$

donc $y = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n / (2n)!$

d'où

$$y(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \geq 0 \\ \cosh \sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Chapitre 4

SÉRIES DE FOURIER

4.1 SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES

Définition 12 *On appelle série trigonométrique complexe sur $\mathbb{R}$ toute série de fonctions sur $\mathbb{R}$ de la forme :*

(1) $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$

où a_n , b_n *appelés coefficients de la série, sont des nombres complexes.*

Lorsque les coefficients a_n, b_n *sont réels, la série (1) est dite réelle.*

En considèrant la partie réelle et imaginaire pure de l'expression (1), l'étude des séries trigonométriques complexes se raméne à celle des séries trigonométriques réelles.

L'objet du chapitre est l'étude des conditions assurant la convergence des séries trigonométriques et le développement en série trigonométrique des fonctions périodiques.

Remarque.

En effectuant le changement de variable $t = \omega x$ dans (1), on peut ramener l'étude d'une série trigonométrique au cas où $\omega = 1$, c'est à dire de la forme :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$$

Theorème 20 *Soit* $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ *une série trigonométrique réelle. Alors :*

(i) Si les séries $\sum a_n$ *et* $\sum b_n$ *sont absolument convergentes, alors la série (2) est normalement convergente dans* $\mathbb{R}$.

(ii) Si les suites (a_n) *et* (b_n) *sont décroissantes et tendent vers* 0, *alors la série (2) est uniformément convergente dans tout intervalle* $[\theta + 2k\pi, 2\pi - \theta + 2k\pi]$,

$k \in \mathbb{Z}, \theta \in]0, 2\pi[$; en particulier elle converge simplement pour tout $\theta \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Remarques.

1) Ecriture complexe d'une série trigonométrique : On a $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ et $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$ d'où

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}\right)$$

où l'on a posé : $c_0 = \frac{a_0}{2}$, $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$, et $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$

2) Si la série trigonométrique $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ converge, alors sa somme est une fonction périodique de période 2π. On en déduit que si la série converge sur un intervalle $[\theta, \theta + 2\pi]$, alors la convergence a lieu sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Theorème 21 *Si la série trigonométrique $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$ converge uniformément sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, et a pour somme la fonction f alors on a :*

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt)\, dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt)\, dt, \text{ pour } n \geq 1.$$

4.2 SÉRIES DE FOURIER

Définition 13 *Soit f une fonction continue par morceaux sur $[0, 2\pi]$. On appelle série de Fourier de f la série trigonométrique $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ dont les coefficients a_n, b_n sont donnés par :*

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt)\, dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt)\, dt, \text{ pour } n \geq 1$$

et appelés les coefficients de Fourier de la fonction f.

Les nombres complexes $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-int} dt$, $n \in \mathbb{Z}$

sont appelés les coefficients de Fourier complexes de f.

Remarques.

1) Si la fonction f n'est pas donnée explicitement sur $[0, 2\pi]$, mais sur un intervalle $[\alpha, \alpha + 2\pi]$ (ou $[\alpha - \pi, \alpha + \pi]$), dans ce cas le calcul des coefficients de Fourier de f s'effectue sur l'intervalle $[\alpha, \alpha + 2\pi]$ (ou $[\alpha - \pi, \alpha + \pi]$).

2) Si la fonction f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, périodique de période T, les coefficients de Fourier de f sont définis par :

$a_0 = \frac{2}{T} \int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\, dt$

$a_n = \frac{2}{T} \int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \cos(2\pi nt/T)\, dt$ et $b_n = \frac{2}{T} \int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \sin(2\pi nt/T)\, dt$

, pour $n \geq 1$

$c_n = \frac{1}{T} \int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \exp(-2i\pi nt/T)\, dt$, $n \in \mathbb{Z}$.

Pour tout entier $n \geq 1$ nous avons les relations :

$a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = i(c_n - c_{-n})$

ou $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$, et $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$.

Theorème 22 *(symétries) Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *une fonction continue par morceaux,* $2\pi-$ *périodique, alors on a les résultats suivants :*

i) Si f *est à valeurs réelles alors les coefficients* a_n, $n \in \mathbb{N}$ *et* b_n , $n \geq 1$, *sont réels et pour tout entier relatif* n *nous avons :*

$c_n = \overline{c_{-n}}$

ii) Si f *est paire (respectivement impaire) on a :*

$b_n = 0, n \in \mathbb{N}^*$ $a_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} f(t) \cos(nt)\, dt$

(respectivement $a_n = 0, n \in \mathbb{N}$ $b_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} f(t) \sin(nt)\, dt$ *)*

Exemples.

1) Soit f la fonction $2\pi-$périodique définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in]-\pi, 0[\\ +1 & \text{si } x \in]0, \pi[\end{cases}$$

La fonction étant impaire, ses coefficients de Fourier sont donnés par :

$a_n = 0$, et $b_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \sin(nt)\, dt$

d'où $b_{2p} = 0$ et $b_{2p+1} = 4/\pi(2p+1)$

Par conséquent sa série de Fourier $4/\pi \sum\limits_{p=0}^{+\infty} \frac{\sin(2p+1)\,t}{(2p+1)}$ est convergente d'aprés le théorème 1.

2) Soit α un nombre réel non entier et considérons la fonction $x \to \cos(\alpha x)$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

Lemme 1 *(Lebesgue)*

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle fermé borné $[a, b]$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\cos(nx)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\sin(nx)\,dx = 0$$

Corollaire 1 *Si f est une fonction périodique de période T, continue par morceaux sur $[0, T]$, alors ses coefficients de Fourier convergent vers* 0.

Remarque. Un calcul préliminare. Pour les résultats ultérieurs nous avons besoin de calculer des expression de la forme :

$$1/2 + \sum_{k=1}^{n} \cos(ku) \quad , \text{pour tout } u \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$$

Or nous avons la relation :

$$\sum_{k=1}^{n} e^{iku} = (2e^{inu}\left(1 - e^{iu}\right) + e^{iu} - e^{-iu})/8\sin^2(u/2)$$

d'où :

$$1/2 + \sum_{k=1}^{n} e^{iku} = \frac{\sin[(n+1/2)\,u] - i\cos[(n+1/2)\,u] + i\cos(u/2)}{2\sin(u/2)}.$$

Par conséquent, en considérant la partie réelle de l'expression ci-dessus, nous obtenons :

$$1/2 + \sum_{k=1}^{n} \cos(ku) = \frac{\sin[(n+1/2)\,u]}{2\sin(u/2)}$$

Définition 14 *Soit f une fonction sur un intervalle $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$.f est dite continue par morceaux (respectivement dérivable par morceaux) sur I s' il existe une subdivision $(x_k)_{0 \le k \le m}$ de I telle que f soit continue (respectivement dérivable) sur tout intervalle ouvert $]x_{k-1}, x_k[$ $k \in \{1, ..., m\}$ et admet une limite à gauche et une limite à droite (respectivement une dérivée à gauche et une dérivée à droite) en tout point x_k, $k \in \{0, 1, ..., m\}$ de la subdivision.*

Theorème 23 *(Dirichlet)*

Soit f une fonction réelle périodique de période 2π, continue par morceaux sur $[0, 2\pi]$ et admettant en tout point une dérivée à droite et une dérivée à gauche. Alors nous avons les résultats suivants :

i) La série de Fourier de f en x converge vers $f(x)$ en tout point x où la fonction f est continue.

ii) La série de Fourier de f en x converge vers $[f(x_+) + f(x_-)]/2$ en tout point x où la fonction f est discontinue.($f(x_+)$ et $f(x_-)$ désignent respectivement les limites à droite et à gauche de f au point x).

Exemples.

1) Reprenons la fonction impaire, 2π périodique et valant -1 sur $]0,\pi[$. Il s'agit d'une fonction dérivable par morceaux sur $[-\pi,\pi]$, discontinue en 0,avec $f\,(0_+) = 1$, $f\,(0_-) = -1$ et $f\,'_g(0) = f\,'_d(0) = 0$. D'aprés le calcul précédent et le théorème de Dirichlet , on a :

Pour $x \in\,]0,\pi[$.

$$4/\pi \sum_{p\,=\,0}^{+\infty} \frac{\sin(2p\,+\,1)\;x}{(2p\,+\,1)} = 1.$$

Et $x \in\,]-\pi,0[$.

$$4/\pi \sum_{p\,=\,0}^{+\infty} \frac{\sin(2p\,+\,1)\;x}{(2p\,+\,1)} = -1$$

2) Soit f la fonction 2π périodique définie par $f\,(x) = |x|$ pour $|x| < \pi$.

Cette fonction est paire, continue sur $[-\pi,\pi]$, avec $f\,'_g(0) = -1$, $f\,'_d(0) = 1$.Sa série de Fourier est

$$\pi/2-\;4/\pi \sum_{p\,=\,0}^{+\infty} \frac{\cos(2p\,+\,1)\;x}{(2p\,+\,1)^2}$$

Donc pour tout $x \in [-\pi,\pi]$,

$$\pi/2-\;4/\pi \sum_{p\,=\,0}^{+\infty} \frac{\cos(2p\,+\,1)\;x}{(2p\,+\,1)^2} = |x|$$

En particuler en prenant $x = 0$, on obtient

$$4/\pi \sum_{p\,=\,0}^{+\infty} \frac{1}{(2p\,+\,1)^2} = \pi^2/8$$

Calculons la somme de la série $\sum\limits_{n\,=\,1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Nous avons :

$$\sum_{n\,=\,1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{p\,=\,1}^{+\infty} \frac{1}{(2p\;)^2} + \sum_{p\,=\,0}^{+\infty} \frac{1}{(2p\,+\,1)^2}.$$

d'où

$$(3/4)\sum_{n\,=\,1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{p\,=\,0}^{+\infty} \frac{1}{(2p\,+\,1)^2}.$$

Soit

$$\sum_{n\,=\,1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2/6$$

Theorème 24 *(Parseval)*

Soit f *une fonction réelle périodique de période* 2π, *continue par morceaux sur* $[-\pi,\pi]$, *alors ses coefficients de Fourier vérifent les relations*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\ f\ (x)|^2\, dx = 2\pi\left(c_0^2 + \sum_{n\ =\ 1}^{+\infty}[|c_n|^2 + |c_{-n}|^2]\right).$$

$$= \pi\left(|a_0|^2/2 + \sum_{n\ =\ 1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2)\right)$$

Exemples.

1) Soit f la fonction 2π périodique définie par, $f\ (x) = x$ pour $|x| < \pi$

Nous avons,

$$f\ (x) = 2\sum_{p\ =\ 1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{\sin(nx)}{n}$$

d'où

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2\ dx = 4\pi\sum_{n\ =\ 1}^{+\infty} 1/n^2$$

soit

$$\sum_{n\ =\ 1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \pi^2/6$$

2) Soit f la fonction 2π périodique définie par $f\ (x) = |x|$ pour $|x| < \pi$.Nous avons

$$f\ (x) = \pi/2 - 4/\pi\sum_{p\ =\ 0}^{+\infty}\frac{\cos(2p\ +\ 1)\ x}{(2p\ +\ 1)^2}$$

d'où

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2\ dx = \pi[\pi^2/2 + 16/\pi^2\sum_{p\ =\ 0}^{+\infty}\frac{1}{(2p\ +\ 1)^4}]$$

par suite

$$\sum_{p\ =\ 0}^{+\infty}\frac{1}{(2p\ +\ 1)^4} = \pi^4/96$$

On en déduit l'expression,

$$\sum_{n\ =\ 1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \pi^4/90$$

4.3 CONVERGENCE UNIFORME DE LA SÉRIE DE FOURIER

Lemme 2 *Soit* $f \ : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *une fonction* 2π *-périodique,continue et de classe* C^1 *par morceaux.On définit* $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *par* $\phi(t) = f'(t)$ *si est* f *dérivable en* t *et* $\phi(t) = (f_g'(t) + f_d'(t))/2$ *sinon. Alors les coefficients de Fourier complexes de* ϕ *vérifient :* $c_n(\phi) = inc_n(f)$ *pour tout entier* $n \in \mathbb{Z}$.

Theorème 25 *Soit* $f \ : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *une fonction* 2π *-périodique, continue et de classe* C^1 *par morceaux. Alors la série de Fourier de* f *converge normalement vers la fonction* f.

Exercices.

1) Donner le développement en série de Fourier des fonctions 2π-périodiques définies par :

$$f(x) = x \ \ , x \in]0, 2\pi] \ \ , \ g(x) = |\sin x| \, , \ x \in]0, 2\pi] \quad h(x) = e^x \ \ , \ x \in]-\pi, \pi].$$

2) En considérant la série de Fourier de la fonction 2π-périodique définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x & \text{si } x \in]0, +\pi[\\ \pi + x & \text{si } x \in]-\pi, 0[\end{cases}$$

Calculer la somme $\sum\limits_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$.

Chapitre 5 FONCTIONS DE IR^n DANS IR^p

I) NOTIONS DE TOPOLOGIE SUR IR^n

1) Normes sur IR^n:

a) Définition:

On appelle norme sur $\mathbb{R}^n$ toute application $x \to \|x\|$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que :

(i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) $\forall \lambda \in IK,\ \forall x \in E,\ \ \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$

(iii) $\forall (x,y) \in E^2 \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (l'inégalité triangulaire)

L'espace $\mathbb{R}^n$ étant muni de la norme $\|\ \ \|$ est dit espace normé.

b) Exemples:

Sur $\mathbb{R}$ l'application valeur absolue $x \to |x|$ est une norme.

Sur $\mathbb{R}^n$ les applications $\|\ \ \|_1 : x \to \sum_{k=1}^{n} |x_k|$,$\|\ \ \|_2 : x \to (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2)^{1/2}$ et $\|\ \ \|_\infty : x \to \sup_{1 \leq k \leq n} |x_k|$ sont des normes.

Remarque: Dans l'espace $\mathbb{R}^n$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty \leq n\|x\|_1,$$

Plus généralement, nous verrons plutard que deux normes quelconques sur $\mathbb{R}^n$ $\|\ \ \|$ et $\|\ \ \|'$ sont équivalentes dans le sens suivant :

$$\exists \alpha, \beta > 0 \quad \text{tel que} \ : \ \alpha\|x\|' \leq \|x\| \leq \beta\|x\|'$$

c) Boules ouvertes et fermées de $\mathbb{R}^n$

Soit $\|\ \ \|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Pour tout point x de $\mathbb{R}^n$ et tout $r > 0$, la boule ouverte (respectivement fermée) de centre x et de rayon r est définie par :

$B(x,r) = \left\{y \in \mathbb{R}^n / \ \|x-y\| < r\right\}$ (respectivement $\overline{B}(x,r) = \left\{y \in \mathbb{R}^n / \ \|x-y\| \leq r\right\}$).

Dans $\mathbb{R}$ les boules ouvertes (respectivement fermées) sont les intervalles centrés ouverts (respectivement fermés).

Exercice . Déterminer les boules unités de $\mathbb{R}^2$ centrées à l'origine des trois normes fondamentales définies ci-dessus.

d) Intérieur,adhérence d'une partie de $\mathbb{R}^n$

Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est dite ouverte si elle est soit vide soit non vide et si pour tout point x de A il existe $r > 0$ telle que la boule de centre x et de rayon r soit contenue dans A ($B(x,r) \subset A$). Soit A une partie quelconque de $\mathbb{R}^n$; un point a de A est dit point intérieur de A s'il existe une boule centrée en a et contenu dans A .L'intérieur d'une partie A quelconque de $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des points intérieurs de A et c'est le plus grand ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenu dans A , il es noté A° . A titre d'exemple, les boules ouvertes et plus généralement les réunions quelconques de boules ouvertes sont des ouverts.

Une partie B de $\mathbb{R}^n$ est dite fermée si elle est le complémentaire d'une partie ouverte A , soit $B = \mathbb{R}^n \setminus A$. Soit B une partie quelconque de $\mathbb{R}^n$; un point a de $\mathbb{R}^n$ est dit point adhérent à B si pour tout $r > 0$ on a $B(x,r) \cap B$ non vide. L'adhérence d'une partie B quelconque de $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des points ahérents à B , c'est le plus petit fermé contenant B, noté $\overline{B}$. Une réunion finie de boules fermées est un exemple de fermé.

Exemple: L'intérieur de la boule fermée $\overline{B}(x,r)$ est la boule ouverte $B(x,r)$. L'adhérence de la boule ouverte $B(x,r)$ est la boule fermée $\overline{B}(x,r)$.

Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est dite bornée s'il existe $r > 0$, tel que A soit contenue dans la boule fermée $\overline{B}(0,r)$:

$\exists r > 0,\ \forall x \in A,\ \ \|x\| \leq r$

Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est dite connexe si elle n'est pas réunion de deux ouverts disjoints de $\mathbb{R}^n$:

$\nexists\, A_1, A_2$ ouverts de $\mathbb{R}^n$: $A = A_1 \cup A_2$ avec $A_1 \cap A_2 = \varnothing$

Dans $\mathbb{R}$, une partie est connexe si et seulement si c'est un intervalle .

Remarque: Du fait que deux normes quelconques de $\mathbb{R}^n$ sont toujours équivalentes, les notions définies dans ce paragraphe (ouvert,fermé,..) ne dépendent pas de la norme choisie dans $\mathbb{R}^n$.

2) Suites dans $\mathbb{R}^n$

Définition.Une suite (x_m) d'éléments de $\mathbb{R}^n$ est dite convergente vers $x \in \mathbb{R}^n$, si l' on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N} : m > m_0 : \|x_m - x\| < \varepsilon$$

Proposition 1

La limite d' une suite convergente dans $\mathbb{R}^n$ est unique.

Proposition 2

Soit (x_m) une suite d'élements d'une partie A de $\mathbb{R}^n$. Nous avons :

$$x_m = (x_m^1, x_m^2, .., x_m^n)$$

Alors la suite (x_m) converge dans $\mathbb{R}^n$ si et seulement si chaque suite suite réelle (x_m^k) ($k \in \{1, .., n\}$) converge dans $\mathbb{R}$ et l'on a :

$$\lim_{m\to+\infty} x_m = (\lim_{m\to+\infty} x_m^1, \lim_{m\to+\infty} x_m^2, \ldots, \lim_{m\to+\infty} x_m^n)$$

Propriètès :

Soient $(u_m), (v_m)$ deux suites convergentes de $\mathbb{R}^n$ et λ réel , alors grâce aux propriètès des suites réelles , nous avons :

i) $\lim_{m\to+\infty}(u_m + v_m) = \lim_{m\to+\infty} u_m + \lim_{m\to+\infty} v_m$

ii) $\lim_{m\to+\infty} \lambda u_m = \lambda \lim_{m\to+\infty} u_m$

Remarques:1) La convergence d'une suite ne dépend pas de la norme choisie dans $\mathbb{R}^n$.

2) On peut montrer que l'adhérence d'une partie A quelconque de $\mathbb{R}^n$, est égal à l'ensemble des limites de suites d'élements de A.

e) Compacité:

Définition:

Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est dite compacte si toute suite d'élements de A on peut en extraire une sous suite convergente dans A.

Théorème 1 :

Une partie de $\mathbb{R}^n$ est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée dans $\mathbb{R}^n$.

.

Exemple: Toute boule fermée ou sphère de $\mathbb{R}^n$ est compacte.

II) FONCTIONS CONTINUES DE $\mathbb{R}^n$ DANS $\mathbb{R}^p$

1) Notion de limite:

a) Définition.Soit f une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. Soit $a \in \overline{A}$, on dit que f admet une limite en a de valeur $l \in \mathbb{R}^p$ quand x tend vers a, si l'on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A \text{ et } \|x - a\| < \eta \implies \left\| f(x) - l \right\| < \varepsilon.$$

On écrit alors :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

b) **Remarque**:

Avec les hypothèses de la définition ci-dessus,comme la fonction f est à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, nous écrivons $f = \left(f_1, \ldots, f_p \right)$. En prenant la même démarche que pour la proposition 2, nous pouvons montrer que la fonction f admet une limite l en a si et seulement si les fonctions composantes $f_1, \ldots, f_p$ admettent des limites $l_1, \ldots, l_p$ et l'on a alors :

$l = (l_1, \ldots, l_p)$

Ceci ramène l'étude des limites de fonctions sur $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ aux limites de fonctions à valeurs réelles.

c) **Propriètès des limites**:

Soient f et g deux fonctions définies sur $A \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs réelles et admettant une limite en un point $a \in \overline{A}$, nous avons alors les propriètès:

i) $\lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

ii) $\lim_{x \to a}(f(x).g(x)) = \lim_{x \to a} f(x).\lim_{x \to a} g(x)$

iii) $\lim_{x \to a}[f(x) / g(x)] = [\lim_{x \to a} f(x)] / [\lim_{x \to a} g(x)]$, à condition que $g(x) \neq 0$ pour x voisin de a.

Exercice: Calculer $\lim_{(x,y) \to (0,0)} x/(x^2 + y^2)$

2) **Continuité**

a) Définition:Soit f une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. On dit que f est continue en un point a appartenant à l'intérieur de A, si l'on a :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

ce qui se traduit par :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A \text{ et } \|x - a\| < \eta \implies \left\| f(x) - f(a) \right\| < \varepsilon.$$

b) **Remarque**:

Grâce à la remarque II)1) b), étudier la continuité de $f = \left(f_1, \ldots, f_p \right)$ au point a se ramène à l'étude de la continuité des fonctions composantes $f_1, \ldots,$ et f_p en ce point.

c) **Théorème 2**

Soit f une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. Alors f est continue au point a si et seulement si pour toute suite (x_m) d'élements de A qui converge vers a la suite $\left(f(x_m) \right)$ converge vers $f(a)$.

Remarque : Soit f une fonction définie et continue sur une partie A de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A$, en fixant $(x_2, .., x_n)$ l'application $x_1 \to f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est continue.Même résultat pour les autres fonctions partielles de f. La réciproque de cette propriètè est fausse , voici un contre-exemple avec la fonction définie dans $\mathbb{R}^2$ par:

$$f(x,y) = \begin{cases} x \quad y/(x^2+y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

d) **Proposition 3**: **Continuité globale**

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. Alors nous avons l'équivalence:

i) f est continue en tout point de $\mathbb{R}^n$.

ii) L'image réciproque par f de tout ouvert (respectivement fermé) de $\mathbb{R}^p$ est un ouvert (respectivement fermé) de $\mathbb{R}^n$.

.

e) **Proposition 4**:

Toute application linéaire u de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, est continue et vérifie une inégalité de la forme suivante :

$$\|u(x)\| \leq M\|x\| \quad , \forall x \in \mathbb{R}^n$$

où M est une constante dépendante de u .

.

f) **Exemple**:

Soit à étudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2y/(x^2+y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est clair que f est continue en tout point (x,y) non nul.Passons en coordonnées polaires , nous obtenons :

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r\cos^2\theta\sin\theta$$

d'où

$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| \leq r$$

donc

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

g) **Proposition 5**:

Soit f une fonction définie sur une partie ouverte A de $\mathbb{R}^2$ et $(a,b) \in A$ .Alors f est continue au point (a,b) si et seulement si pour tout $\theta \in [0,2\pi]$, nous avons :

$$\lim_{r\to0} f(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta) = f(a,b)$$

Exercice. Discuter la continuité de l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} |x|^\alpha|y|^\beta/(x^2+y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

selon les paramétres réels α et β.

h) **Propriëtès algébriques** :

Soient f et g deux fonctions définies sur $A \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs réelles et qui son continues en un point a intérieur de A, alors les fonctions somme $f+g$, produit $f.g$ et rapport f/g (si $g(a) \neq 0$) sont continues en a .

La preuve découle du théorème 2, et des propriëtès des suites réelles convergentes .

Un autre corollaire de ce théorème affirme que si f est continue en a et si g est continue en $b = f(a)$, alors la fonction composée $g \circ f$ est continue en a.

k) Propriètès topologiques des fonctions continues :

Théorème 3:

Soit f une fonction définie et continue sur une partie A de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. Alors l'image par f de tout compact K de A est compact dans $\mathbb{R}^p$.

Corollaire

Toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont deux à deux équivalentes.

Théorème

L'image de toute partie connexe de $\mathbb{R}^n$ par une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ est connexe.

III) CALCUL DIFFERENTIEL

1) Dérivées partielles

a) Définition: Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a = (a_1,..,a_n) \in U$ .On dit que $f: U \to \mathbb{R}$ admet une dérivée partielle par rapport à la variable x_i au point a si la fonction f_i définie dans un voisinage de a_i par $f_i\ (x) = f\left(a_1,.,a_{i-1},a_i,a_{i+1},..,a_n\right)$ est dérivable au point a_i , c'est à dire que le rapport :

$$[\ f\left(a_1,.,a_{i-1},a_i+h,a_{i+1},..,a_n\right) - f\left(a_1,.,a_{i-1},a_i,a_{i+1},..,a_n\right)]/h$$

admet une limite finie quand h tend vers 0 .Cette limite est notée $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ et appelée la dérivée partielle de f par rapport à x_i , au point a .

b) Exemples:

i) La fonction $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2y^3$ admet des dérivées partielles par rapport à x et y en tout point de $\mathbb{R}^2$, données par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^3 \ , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2y^2$$

ii) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par:

$$f(x,y) = \begin{cases} x\ \ y/(x^2+y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a $\lim_{h\to 0}[\ f(h,0) - f(0,0)]/h = \lim_{h\to 0}[\ f(0,h) - f(0,0)]/h = 0$

Donc f admet des dérivées partielles par rapport à x et y en $(0,0)$ et on a $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$

c) Matrice jacobienne:

Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. Pour $x \in U$, nous avons $f(x) = \left(f_1\ (x),\ldots,f_p(x)\right)$, où $f_1,\ldots,f_p$ sont des fonctions sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$, appelées les fonctions composantes de f .Soit $i \in \{1,..,n\}$, on dit que f admet des dérivées partielles par rapport à x_i en un point a de U , si chacune des fonctions $f_1,\ldots,f_p$ admet une dérivée partielle par rapport à x_i au point a .

Si pour tout $i \in \{1,..,n\}$, la fonction f admet au point a des dérivées partielles par rapport à x_i , la matrice à p lignes et à n colonnes

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & . & . & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & . & . & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(a) & . & . & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

notée $J\left(f\right)(a)$ est appelée la matrice jacobienne de f au point a.

2) Dérivées partielles d'ordre supérieur

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f une fonction définie sur U à valeurs réelles et $a \in U$. Soient i , $j \in \{1,..,n\}$. Supposons que f admette une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ au voisinage du point a. Si la fonction $x \to \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ admet une dérivée partielle par rapport à x_i au point a , on dit que la fonction f admet une dérivée partielle seconde par rapport à x_i et x_j au point a , notée $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\left(\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\right)}{\partial x_i}(a)$ .Si $i = j$, on écrit $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$ au lieu de $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_i}(a)$.

Pour tout muti-indice $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_k) \in \mathbb{N}^k$, on définit de proche en proche les dérivées partielles d'ordre $|\alpha|$, quand elles existent par :

$$\partial^\alpha f(a) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_{i_1}^{\alpha_1} \ldots \partial x_{i_k}^{\alpha_k}}(a)$$

où $i_1 ,\ldots, i_k \in \{1,..,n\}$ et $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k$.

Théorème 4 (**Théorème de Schwarz**)

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f une fonction définie sur U à valeurs réelles et admettant des dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ définies au voisinage d'un point a de U. Si les fonctions $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ sont continues au point a , on a $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$.

Remarques:i) Si la fonction $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ (ou $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$) n'est pas continue au point , la relation $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ n'est pas satisfaite à priori.Voici un contre-exemple:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par:

$$f(x,y) = \begin{cases} x \;\; y\,(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (y(x^4 - y^4) + 4x^2y^3)/(x^2 + y^2)^2 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x(x^4 - y^4) - 4x^2y^3)/(x^2 + y^2)^2$$

ce qui donne :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \;\; \partial x}(0,0) = -1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \;\; \partial y}(0,0) = 1$$

ii) Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ admet des dérivées partielles continues jusqu'à un ordre $k \geq 2$, alors d'aprés le théorème de Schwarz, on peut changer l'ordre des dérivations partielles par rapport à $x_1,..,x_n$.

3) **Différentiabilité**

Définition .Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f une fonction définie sur U à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.On dit que f est différentiable au point x de U s'il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ telle que :

$$f(x+h) = f(x) + L(h) + \|h\|\varepsilon(h)$$

où ε est une fonction définie au voisinage de 0 telle que $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0.$

L'application linéaire L dépend de f et $de\, x$, elle est notée $df(x)$ et s'appelle la différentielle de f au point $x.$ La différentiabilité de f peut s'exprimer dela façon suivante : il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ telle que :

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{\|h\|}[\,f(x+h) - f(x) - L(h)] = 0$$

Exemples :

i) Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.Toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable au sens classique en un point x est différentiable et l'on a :

$$df(x)(h) = f'(x)h$$

où $f'(x)$ désigne la dérivée de f au point x.

ii) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire .Alors f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^n$ et l'on a pour tout $x \in \mathbb{R}^n, df(x) = f.$En effet , nous avons pour tout $(x,h) \in (\mathbb{R}^n)^2$ la relation $f(x+h) = f(x) + f(h).$

Théorème 5

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f une fonction définie sur U à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, et $f_1,\ldots,f_p$ les composantes de f .Alors f est différentiable en un point x de U si et seulement si $f_1,\ldots,f_p$ sont différentiables au point x et nous avons :

$$df(x) = (df_1(x),..,df_p(x))$$

Théorème 6

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f une fonction définie sur U à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, et $f_1,\ldots,f_p$ les composantes de f. Si f est différentiable en un point x de U alors pour tout $i \in \{1,\ldots,p\}$, la fonction composante f_i admet des dérivées partielles $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ pour tout $j \in \{1,\ldots,n\}$. .De plus, la matrice associée à l'application linéaire $df(x)$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{R}^p$ est la matrice jacobienne $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{1\le i\le p, 1\le j\le n\,,}$ de f au point x.

Remarque

La réciproque du théorème 6 n'est pas toujours vraie.Etudier le contre-exemple suivant :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par:

$$f(x,y) = \begin{cases} x\ \ y/\sqrt{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f admet des dérivées partielles nulles à l'origine mais qu'elle n'est pas différentiable en ce point.

Théorème 7

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f une fonction définie sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$ et admettant des dérivées partielles continues en un point a de U, alors f est différentiable au point a.

Définition

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ .On dit que f est de classe C^k sur U, k un entier non nul, si f admet des dérivées partielles $\partial^\alpha f$ continues pour tout $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq k$.

4) Différentiabilité dans une direction

Définition.Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\vec{u}$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$. Une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est dite différentiable dans la direction de $\vec{n}$ en un point a de U si le rapport $\frac{f\left(a+t\vec{u}\right)-f(a)}{t}$ admet une limite quand t tend vers 0. Cette limite, quand elle existe, est notée $D_{\vec{u}} f(a)$.

Théorème 8

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable en un point a de U, et $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$. Alors f admet une dérivée au point a dans la direction de $\vec{u}$ donnée par :

$D_{\vec{u}} f(a) = df(a)\left(\vec{u}\right)$

5) Opérations sur les fonctions différentiables

Théorème 9

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et deux fonctions $f, g : U \to \mathbb{R}^p$. Si f et g sont différentiables en un point a de U, alors :

i) $f+g$ est différentiable au point a et on a:

$$d\left(f+g\right)(a) = df(a) + dg(a) \ \text{(et } J\left(f+g\right)(a) = J\left(f\right)(a) + J(g)(a) \text{)}$$

ii) Si $p = 1$, alors $f.g$ est différentiable au point a et on a :

$$d\left(f.g\right)(a) = g(a)df(a) + f(a)dg(a)$$

iii) Si $p = 1$ et $g(a) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est différentiable au point a et on a :

$$d\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{1}{g(a)^2}[g(a)df(a) - f(a)dg(a)]$$

Théorème 10

Soient U et V deux ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ et deux fonctions $f : U \to \mathbb{R}^n$ et $g : V \to \mathbb{R}^p$ telles que $f(U) \subset V$. Soit a un point de U, alors si f est différentiable au point a et si g est différentiable au point $f(a)$ alors $g \circ f$ est différentiable au point a et on a:

$$d\left(g \circ f\right)(a) = dg\left(f(a)\right) \circ df(a) \ \text{(et } J\left(g \circ f\right)(a) = J(g)\left(f(a)\right).J\left(f\right)(a) \text{)}$$

soit

$$\left(\frac{\partial\left(g_i \circ f\right)}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1 \leq i \leq p,\\ 1 \leq j \leq m}} = \left(\frac{\partial g_i}{\partial y_k}\left(f(a)\right)\right)_{\substack{1 \leq i \leq p,\\ 1 \leq k \leq n}} \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1 \leq k \leq n,\\ 1 \leq j \leq m}}$$

Exemples :

1) Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et $g : V \to \mathbb{R}$ telles que $f(U) \subset V$. Supposons que f et g soient différentiables sur U et V respectivement .Nous avons :

$$J\big(f\big)(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial f_2}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

et

$$J(g)(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

d'où

$$J\big(g\circ f\big)(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}\big(f_1(u,v),f_2(u,v)\big) & \frac{\partial g}{\partial y}(f_1(u,v),f_2(u,v)) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial f_2}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

On en déduit donc

$$\frac{\partial g\big(f(u,v)\big)}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial x}\big(f(u,v)\big)\frac{\partial f_1}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial g}{\partial y}\big(f(u,v)\big)\frac{\partial f_2}{\partial u}(u,v)$$

$$\frac{\partial g\big(f(u,v)\big)}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial x}\big(f(u,v)\big)\frac{\partial f_1}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial g}{\partial y}\big(f(u,v)\big)\frac{\partial f_2}{\partial v}(u,v)$$

2) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable.Posons $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$, alors nous avons :

$$\frac{\partial f\big(x(r,\theta),y(r,\theta))\big)}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(r,\theta),y(r,\theta))\big)\frac{\partial x}{\partial r}(r,\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(r,\theta),y(r,\theta))\big)\frac{\partial y}{\partial r}(r,\theta)$$

et

$$\frac{\partial f\big(x(r,\theta),y(r,\theta))\big)}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(r\theta,\theta),y(r,\theta))\big)\frac{\partial x}{\partial \theta}(r,\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(r,\theta),y(r,\theta))\big)\frac{\partial y}{\partial \theta}(r,\theta)$$

ce qui donne

$$\frac{\partial f\big(x(r,\theta),y(r,\theta))\big)}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}\big(x(r,\theta),y(r,\theta))\big) + r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}\big(x(r,\theta),y(r,\theta))\big)$$

et

$$\frac{\partial f\big(x(r,\theta),y(r,\theta))\big)}{\partial \theta} = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}\big(x(r,\theta),y(r,\theta))\big) + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}\big(x(r,\theta),y(r,\theta))\big)$$

Exercice

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que les fonctions ϕ et ψ définies sur $\mathbb{R}^2$ par $\phi(x,y) = f(x+y)$ et $\psi(x,y) = f(x-y)$ sont différentiables et calculer leurs dérivées partielles.

6) Théorème des accroissements finis

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On dit que est convexe si pour tout couple $(a,b) \in U^2$, le segment $[a,b] = \{x = a+\lambda(b-a) \ / \ \lambda \in [0,1]\}$ est inclus dans U.

Théorème 11

Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur U. Alors pour tout couple $(x,x+h) \in U^2$ il existe $\theta \in]0,1[$ tel que :

$$f(x+h) - f(x) = df(x+\theta h)(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta h)h_i$$

Remarque:

Le théorème des accroissements finis n'est pas toujours valable si la fonction f est à valeurs dans un espace $\mathbb{R}^p$ avec $p \geq 2$. Néanmoins, nous avons le résultat du théorème suivant qui donne une inégalité des accroissements finis :

Théorème 12

Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^p$ une fonction différentiable sur U telle que $\left\| df(x) \right\| \leq k$ (k une constante) pour tout $x \in U$. Alors , quels que soient les points x, y de U, on a :

$$\left\| f(y) - f(x) \right\| \leq k\|y - x\|$$

Corollaire

Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^p$ une fonction différentiable sur U. Alors f est constante sur U si et seulement si sa différentielle est nulle sur U ($df(x) = 0$).

Le résultat est également vrai dans le cas où U est connexe.

7) Développements limités et Formule de Taylor:

Théorème 13

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

A l'ordre 1:

Si f est de classe C^1. Pour tout $a \in U$, nous avons le développement limité suivant, au voisinage du point a :

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i + o(\|h\|)$$

A l'ordre 2:

Si f est de classe C^2, nous avons le développement limité suivant, au voisinage du point a de U :

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}(a)h_i h_j\right) + o\left(\|h\|^2\right)$$

8) Extremums

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction.

Définitions.On dit que f présente un maximum (respectivement minimum) local en un point x_0 de U, s'il existe une boule $B(x_0, r)$ contenue dans U telle que :

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \text{pour tout } x \in B(x_0, r)$$

$$(\text{ respectivement } \quad f(x) \geq f(x_0), \quad \text{pour tout } x \in B(x_0, r) \ )$$

Un point x_0 de U tel que $\nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \\ . \\ . \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} = \vec{0}$

est dit point critique de f.

Théorème 14

Si f est différentiable au point $x_0 \in U$ et présente un extremum local en ce point , alors x_0 est un point critique de f.

Définition

Soit $M = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n réelle et symétrique ($a_{i\,j} = a_{j\,i}$ pour tout couple d'entiers $(i,j) \in [1,n]^2$).On dit que est positive si, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, nous avons :

$(Mh,h) \geq 0$

Elle est dite définie positive si

$(Mh,h) > 0$

pour tout $h \in \mathbb{R}^n$.

Avec $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ . \\ . \\ h_n \end{pmatrix}$, on a $Mh = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1\,j}h_j \\ . \\ . \\ \sum_{j=1}^{n} a_{n\,j}h_j \end{pmatrix}$ d'où

$$(Mh,h) = \sum_{j=1}^{n} a_{i\,i}h_i^2 + 2 \sum_{,1 \leq i,\, j \leq 1} a_{i\,j}h_ih_j$$

Exemples:

1) Une matrice réelle symétrique d'odre 2 , $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ est positive si et seulement si $a,c \geq 0$ et $\det M \geq 0. M$ est définie positive ssi $a,c > 0$ et $\det M > 0$.

2) Soit A une matrice réelle d'ordre $n \geq 1$, alors $M = {}^t AA$ (où ${}^tA$ la transposée de A) est positive.En effet, nous avons :

$\left({}^tAA\,h,h\right) = (Ah,Ah) = \|Ah\|^2 \geq 0.$

M est définie positive si A est inversible, soit ssi $\det A \neq 0$.

Remarque:

On peut montrer qu'une matrice symétrique réelle d'ordre n est positive (respectivement définie positive) ssi ses valeurs propres sont positives (respectivement strictement posisives).

Théorème 15

Soit M une matrice réelle carrée d'ordre n , symétrique définie positive, alors il existe une constante $c > 0$ telle que:

$(Mx,x) \geq c\|x\|^2$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Définition

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. de classe C^2. On appelle hessienne de f au point $x_0 \in U$ la matrice symétrique:

$$H\left(f\right)(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & . & . & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & . & . & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) & . & . & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

Rappel sur la dimension 1:

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de classe C^2 sur I .Soit $x_0 \in I$ tel que $f'(x_0) = 0$. Alors nous avons les résultats suivants:

-Si $f''(x_0) > 0$, alors f présente un minimum strict en x_0.

-Si $f''(x_0) < 0$, alors f présente un maximum strict en x_0.

- Si $f''(x_0) = 0$, on ne peut rien dire.

Théorème 16

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. de classe C^2 sur U et $x_0 \in U$, un point critique de f. Alors :

i) Si la matrice $H\left(f\right)(x_0)$ est définie positive, alors f présente un minimum local au point x_0.

ii) Si la matrice $-H\left(f\right)(x_0)$ est définie positive, alors f présente un maximum local au point x_0

Théorème 17 (**Cas de la dimension 2**)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. de classe C^2 sur U et $(x_0, y_0) \in U$, un point critique de f. On pose $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$ et $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x_0, y_0)$. Alors nous avons les résultats suivants:

- Si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$, f admet en (x_0, y_0) un minimum local .
- Si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$, f admet en (x_0, y_0) un maximum local .
- Si $rt - s^2 < 0$, f n'admet pas d'extremum local en (x_0, y_0) .
- Si $rt - s^2 = 0$, on ne peut pas conclure directement.

Exemple:

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$

Etudier la nature des points critiques de cette fonction.